NOTIONS DE PROBABILITÉS

Préambule :

Cet exposé n'est pas un cours de bridge. Au bridge, on peut parfaitement s'en passer. Il s'agit seulement, par curiosité, d'introduire quelques notions de probabilités. Le problème de bridge peut être résolu par simple logique, sans le développement mathématique qui est destiné à résoudre des problèmes beaucoup plus complexes.

Introduction :

Le terme *probabilité* désigne l'opposé du concept de *certitude* ; il est une évaluation du caractère probable d'un événement. Assez récemment, la probabilité est devenue une science mathématique appelée *théorie des probabilités* ou plus simplement *probabilités*.
La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1. Plus ce nombre est grand, plus le *risque*, ou la *chance*, que l'événement se produise est grand. L'étude des probabilités a connu de nombreux développements grâce à l'étude de l'aspect aléatoire et en partie imprévisible de certains phénomènes, en particulier les jeux de hasard. Ceux-ci ont conduit les mathématiciens à développer une théorie qui a ensuite eu des implications dans des domaines aussi variés que la météorologie, la finance, la chimie, ou le bridge.

Petits tests préliminaires :

Lisez très attentivement les énoncés, essentiels à la compréhension :

- J'ai 2 enfants, dont l'un est un garçon (G). Quelle est la probabilité pour que l'autre soit une fille (F), 1/2 ou 2/3 ?
  - 2/3, bien sûr, car il y a 2 cas favorables, GF et FG, pour 3 cas possibles, GF, FG, et GG.
  - Mais ce serait 1/2, si j'avais précisé que l'aîné était un garçon :
    - 1 cas favorable (GF) pour 2 cas possibles (GF et GG).
  - En d'autres termes, parmi toutes les familles de deux enfants avec un garçon en première position, la moitié d'entre elles a en réalité deux garçons, tandis que, parmi toutes les familles de deux enfants avec au moins un garçon, deux tiers d'entre elles a en fait deux garçons.
  - Ce problème est connu sous le nom de « paradoxe des deux enfants ».
- Je dispose de 3 boîtes noires A, B et C. A l'intérieur de l'une d'elles, je dépose en cachette l'As de cœur et je vous demande de deviner la boîte dans laquelle se trouve cette carte.
  - Vous choisissez, mettons, la boîte A. Maintenant, je vous affirme que la carte ne se trouve pas dans la boîte C :
    - Maintiendriez-vous votre choix initial ou choisiriez-vous maintenant la boîte B ? :
    - Rappel : la probabilité initiale est de 1/3.
  - En choisissant la boîte A, vous aviez **initialement** 2 chances sur 3 de vous tromper.
    - En maintenant votre choix initial, vous avez toujours 2 chances sur 3 de vous tromper !
    - En reportant le choix sur la boîte B, vous n'avez plus qu'1 chance sur 3 (le complément).
  - Il faut donc modifier votre choix initial avec la probabilité 2/3 de deviner juste.
- Que s'est-il passé entre le premier et le second choix de probabilités ?
  - Une information supplémentaire été fournie :
    - Dans le premier exemple, la précision sur le sexe du premier enfant, celé jusque-là.
    - Dans le second, le fait (essentiel) qu'après le premier choix, on vous a réduit les possibilités en indiquant qu'une des boîtes ne contenait pas l'♥A.

Principe : A chaque étape de la réalisation d'un problème de probabilités,
il convient d'intégrer dans le raisonnement **l'information supplémentaire fournie.**
Ne pas prendre en compte cette information,
c'est choisir avec l'incertitude complète initiale **alors que celle-ci a été réduite.**

Application au bridge :

Après des enchères simples, 2SA(?)-3SA, Sud joue 3SA sur entame de ♠4.

- Plan de jeu : 8 levées de tête (5 ♠ et 3 As). Où trouver la 9ème avec la maximum de chances de réussite, avec deux rentrées au mort, ♠V et ♠10 ?
- Les 3 options avec leurs probabilités « *a priori* » :
  - ➢ Option A : Tenter <u>deux fois</u> la double impasse ♥ à ♥RD.
    - Les chances de succès sont de 75% <u>*a priori*</u> (cf. cours 4ème série *Probabilités, placements*).
  - ➢ Option B : Tenter successivement les impasses mineures.
    - Les chances sont ici encore à 50% + 50%/2 = 75%.
  - ➢ Option C : <u>Une fois</u> la double impasse ♥, puis une impasse mineure.
    - Les chances *a priori* sont plus réduites : 25% + 75%/2 = 62,5%.

♠ V 10 7
♥ 7 4 3
♦ 8 4 3
♣ A D 6 2

♠ A R D 6 3
♥ A V 10
♦ A D 5
♣ 8 7

Choix de la meilleure option :

- Une évidence : Si la première impasse réussit, le <u>problème est résolu</u>.
  - ➢ <u>Evidence ! Mais essentielle</u>, car a contrario, si elle rate, les données « futures » sont changées, car les possibilités sont réduites par la première information.
    - Voyons donc les conséquences du <u>choix de la première impasse</u>.
- La première impasse ratée (retour ♠) était à ♥ (options A et C):
  - ➢ Est-ce que <u>maintenant</u> les options A et C, qui n'était pas équivalentes, le sont devenues ?
    - L'option C, impasse indépendante de la première, est à 50% (impasse).
    - L'option A – refaire l'impasse ♥ – est-elle supérieure à 50% : OUI, car elle est liée à la première impasse, ce qui porte ses chances à <u>2 sur 3</u> (la démonstration <u>mathématique</u> est en appendice). Les chances de 75% *a priori* sont passées à 67% *a posteriori*.
    - L'option C (deux impasses différentes, l'une double et l'autre simple) reste donc inférieure à la double impasse de l'option A : 50% contre 67%.
- Si la première impasse est ♣ (ou ♦), option B : La seconde impasse reste à 50% <u>maintenant</u>.
  - ➢ Les chances *a priori* de 75%, avant la première impasse, sont devenues de 50% *a posteriori*.

Principes : Un déclarant, en présence d'une couleur C1 sans le Roi et la Dame,
ayant besoin d'1 levée pour réussir son contrat, devra,
après avoir tenté une première impasse infructueuse,
renouveler l'impasse dans cette même couleur (probabilité = 2/3)
plutôt que de tenter une impasse dans une autre couleur C2 (probabilité = 1/2) ou
délaisser cette couleur C1 pour tenter 2 impasses dans 2 autres couleurs C2 et C3.

- N.B. : Certains bridgeurs appellent cela le principe du *libre choix* ou le principe du *moindre choix*. On devrait plutôt l'appeler le <u>*principe du choix optimal*</u>.

Appendice pour les mathématiciens :

Pourquoi la double impasse garde-t-elle *a posteriori* 2/3 chances ?

On a recours au théorème de Bayes, pour le calcul des probabilités *a posteriori*. Il s'agit d'une probabilité que l'on souhaite affiner en tenant compte d'une information donnée par la survenance d'événements liés : ici, l'échec de la première impasse.

Une probabilité *a priori* (2) se calcule de la manière suivante : à partir d'une situation donnée, on fait le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles. C'est la probabilité *a priori* que tel événement se produira.

Une probabilité *a posteriori* (6) se calcule à partir de la survenance d'un événement donné, et on s'efforce de tenir compte de la nouvelle situation induite.

Principe : C'est l'information donnée par la survenance de l'événement, qui vient modifier la probabilité *a priori* en réduisant l'incertitude initiale.

Situations	Mains Ouest/Est	Probabilité *a priori*	Probabilité conditionnelle	Probabilité composée	Probabilité *a posteriori*
	(1)	(2)	(3)	(4)=(2)*(3)	(6)=(4)/(5)
n	S=n	P(S=n)	P(Z=R/S=n)	P_n(Z=R)	P(S=n/Z=R)
1	xx/RD	1/4	1/2	1/4*1/2 = 1/8	1/3
2	Dx/Rx	1/4	1	1/4*1 = 1/4	2/3
3	Rx/Dx	1/4	0	1/4*0 = 0	0
4	RD/xx	1/4	0	1/4*0 = 0	0
				(5) ΣP_n(Z=R)3/8	ΣP(S=n/Z=5)=1

n = numéro d'ordre, S = situation, P = probabilité, Z = carte, R = Roi, Σ = somme.

Commentaires du tableau ci-dessus :

- (1) S=n : Il y a 4 situations possibles, xx/RD, Dx/Rx, Rx/Dx, RD/xx.
- (2) P(S=n) : Ces 4 situations ont donc la même probabilité**,**
  - P(S=1) = P(S=2) = P(S=3) = P(S=4) = 1/4.
- (3) P(Z=R/S=n) : C'est une probabilité *conditionnelle*, qui est la probabilité qu'on voit apparaître le Roi, lorsqu'on se trouve dans la situation « n ».
  - a) P(Z=R/S=1) = 1/2. La probabilité de voir apparaître le Roi, dans la situation « 1 » (xx/RD), est 1/2 :
    - En effet, le Roi ou la Dame apparaitront une fois sur 2.
  - b) P(Z=R/S=2) = 1. Dans cette situation, le Roi apparaît toujours.
  - c) P(Z=R/S=3) = P(Z=R/S=4) = 0. En effet, dans ces cas, on ne le verra pas du tout.
- (4) P_n(Z=R) : La probabilité *composée* est, pour chaque situation, le produit des probabilités *conditionnelles* et de la *probabilité* de survenue *a priori* de chaque *situations*. Ici, toutes les situations ont la même probabilité initiale, 1/4.
  - P_n(Z=R)= P(S=n)*P(Z=R/S=n). Détaillons les situations :
  - P_1(Z=R) = 1/4*1/2 = **1/8** ; P_2(Z=R) = 1/4*1 = **1/4** ; P_3(Z=R) = P_4(Z=R) = 1/4*0 = **0**.
- (5) ΣP_n(Z=R) : C'est la somme des probabilités composées précédentes c'est-à-dire la probabilité de voir apparaître le Roi toutes situations « n » confondues :
  - ΣP_n(Z=R) = 1/8 + 1/4 + 0 + 0 = **3/8**.
- (6) P(S=n/Z=R) : Si le Roi est apparu à la première manœuvre (c'est la question posée au départ), quelle est la probabilité de réussite de l'impasse à la Dame ? Elle est la probabilité *a posteriori* de la situation 1 (xx/RD) versus la situation 2 (Dx/Rx) :
  - Probabilité a posteriori de la situation S = 1 : P_1(Z=R)/ΣP_n(Z=R)= 1/8 : 3/8 = **1/3**
  - Probabilité a posteriori de la situation S = 2 : P_2(Z=R)/ΣP_n(Z=R)= 1/4 : 3/8 = **2/3**

Conclusion : La situation n = 2 (Dx/Rx) a donc deux fois plus de chances d'être la situation réelle que la situation n = 1 (xx/RD).